Références :
Oraux XENS Analyse 2, Serge Francinou

Théo. *Soit $a_1, ..., a_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $pgcd(a_1, ..., a_k) = 1$.*
Pour $n \geq 1$, on note u_n le nombre de k-uplets $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $a_1x_1 + ... + a_kx_k = n$. On a alors

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a_1...a_k}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Démonstration. (i) Montrons que

$$f(z) := \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-z^{a_i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n.$$

Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\sum_{x_i\in\mathbb{N}} z^{x_ia_i}$ ont toutes pour rayon de convergence 1.

On a

$$\sum_{x_i=1}^{\infty} z^{a_ix_i} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{a_ix_i} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ avec } b_n = \begin{cases} 1 \text{ si } a_i|n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, $R = \sup\{r \geq 0, (b_nz^n) \text{ bornée}\} = \sup\{r \geq 0, (z^n) \text{ bornée}\}$ et donc $R = 1$.

Considérons le produit de Cauchy de ces k séries entières. On a donc

$$\begin{aligned}\left(\sum_{x_1=0}^{\infty} z^{a_ix_1}\right) \times ... \times \left(\sum_{x_k=0}^{\infty} z^{a_ix_k}\right) &= \sum_{(x_1,...,x_k)\in\mathbb{N}^k} z^{a_1x_1+...+a_kx_k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{(x_1,...,x_k)\in\mathbb{N}^k \\ \sum_{i=1}^k a_ix_i=n}} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n\end{aligned}$$

On a, d'autre part, que

$$\left(\sum_{x_1=0}^{\infty} z^{a_ix_1}\right) \times ... \times \left(\sum_{x_k=0}^{\infty} z^{a_ix_k}\right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-z^{a_i}}.$$

On a donc ce qu'on voulait montrer.

(ii) Cherchons maintenant les pôles de f.
Les pôles de f sont les racines $a_i^{ème}$ de l'unité. Le pôle 1 est de multiplicité k Montrons que les autres sont de multiplicité strictement inférieur à k.
D'après le théorème de Bezout, il existe des entiers $u_1, ..., u_k$ tels que $\sum_{i=1}^k a_iu_i = 1$.
On a que

$$\omega^{a_1} = ... = \omega^{a_k} = 1 \Leftrightarrow \omega \text{pôle de multiplicité } k.$$

En effet, posons $P(X) = (1 - X^{a_1})...(1 - X^{a_k})$.

- Si $\omega^{a_1} = ... = \omega^{a_k} = 1$ alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $(1 - X^{a_i}) = (X - \omega)Q_i$ avec $Q_i(\omega) \neq 0$ (car toutes les racines $a_i^{ème}$ de l'unité sont distinctes).
  Ainsi, $P(X) = (X - \omega)^kQ$ avec $Q(\omega) \neq 0$.
- Supposons que ω racine de multiplicité k.
  S'il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que $(1-X^{a_i}) = (X-\omega)^2Q$ avec $Q(\omega) \neq 0$ ce qui est impossible car les racines $a_i^{ème}$ de l'unité. Ainsi, $\omega^{a_1} = ... = \omega^{a_k} = 1$.

Soit ω un pôle de multiplicité k alors

$$\omega = \omega^{\sum_{i=1}^k a_ix_i} = \prod_{i=1}^{k} (\omega^{a_i})^{x_i} = 1$$

Ainsi, si ω est un pôle de f différent de 1 alors sa multiplicité est strictement inférieur à k.

(iii) Calcul de u_n.
Notons $P = \{\omega_1, ..., \omega_p\}$ l'ensemble des pôles de f avec $\omega_1 = 1$, par décomposition en éléments simples, il existe des constantes complexes $(c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq k-1}}$ et α tels que, pour $|z| < 1$,

$$f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^k} + \sum_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq k-1}} \frac{c_{i,j}}{(\omega_i - z)^j}.$$

Pour $\omega \in P$ et $j \in \mathbb{N}$, la fonction $z \mapsto \frac{1}{(\omega-z)^j}$ est développable en série entière de rayon de convergence 1. Ses coefficients s'obtiennent en dérivant $j-1$ fois le développement en série entière de la fonction $z \mapsto \frac{1}{\omega-z}$. On a, pour $|z|<1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega-z} &= \frac{1}{\omega}\frac{1}{1-\frac{z}{\omega}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\omega^{n+1}}.\end{aligned}$$

On obtient donc, pour $j \leq k-1$

$$\begin{aligned}\frac{(j-1)!}{(\omega-z)^j} &= \sum_{n=j-1}^{\infty}\frac{n!}{(n-j+1)!}\frac{z^{n-j+1}}{\omega^{n+1}} \\ \frac{1}{(\omega-z)^j} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+j-1)!}{(j-1)!n!}\frac{z^n}{\omega^{n+j}} \\ \frac{1}{(\omega-z)^j} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n}\frac{z^n}{\omega^{n+j}}\end{aligned}$$

On obtient donc, par ce qui précède et par unicité du développement en série entière, en prenant les coefficients de z^n dans les deux expressions, que

$$u_n = \alpha\binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq k-1}} c_{i,j}\binom{n+j-1}{n}\omega^{-n-j}$$

Le premier terme est équivalent quand $n \to \infty$ à $\alpha\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$. De la même manière, on obtient que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ et pour tout $j \in [\![1,k-1]\!]$, on a $c_{i,j}\binom{n+j-1}{n}\omega^{-n-j} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{j-1}}{(j-1)!}\frac{c_{i,j}}{\omega^{n+j}}$. En particulier, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ et pour tout $j \in [\![1,k-1]\!]$,$c_{i,j}\binom{n+j-1}{n}\omega^{-n-j} = o\left(\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\right)$. On obtient donc que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}.$$

(iv) Calcul de α.
Posons $\phi(z) = (1-z)^k f(z)$. On a, d'une part,

$$\phi(z) = \alpha + (1-z)^k \sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq k-1}} \frac{c_{i,j}}{(\omega_i - z)^j}$$

puis en évaluant en $z=1$, on obtient $\phi(1)=\alpha$.
D'autre part,

$$\phi(z) = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-z^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+z+...+z^{a_i-1}}$$

On obtient donc en évaluant en 1 que $\alpha = \frac{1}{a_1...a_k}$ d'où le résultat.

□

Leçons possibles : 126 - 224